

采用改进子域模型的表贴式永磁游标电机 磁场解析计算

常勇¹, 包广清², 许瑾², 邹明宝³, 姬伟伟³

(1. 兰州理工大学电气工程与信息工程学院, 730050, 兰州; 2. 西南石油大学电气信息学院, 610500, 成都;

3. 兰州电机股份有限公司, 730300, 兰州)

摘要: 针对传统子域解析方法在计算气隙谐波磁场丰富的表贴式永磁游标电机磁场时, 出现系数矩阵维数高、计算过程复杂的问题, 提出了一种改进的子域解析模型。该模型通过坐标变换, 将各子域矢量磁位在二维极坐标系下的拉普拉斯方程或泊松方程变换为准笛卡尔坐标系下的方程形式, 利用分离变量法计算各子域矢量磁位方程的通解, 根据边界条件计算待定系数, 以双曲函数的形式表示各矢量磁位的解析解。计算了空载反电动势、气隙磁密和电磁转矩, 与传统子域解析方法、有限元法计算结果进行对比。仿真结果表明: 改进子域解析方法与有限元法的相对误差均小于1%; 与传统子域解析方法相比, 空载反电动势、气隙磁密和电磁转矩计算精度分别提升了1.7%、0.87%和3.66%。实验样机的空载反电动势计算波形和测试波形也基本吻合, 验证了该方法的有效性和可行性。

关键词: 表贴式永磁游标电机; 子域解析模型; 双曲函数; 分离变量法; 准笛卡尔坐标系; 有限元法

中图分类号: TM614 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtubxb202307006 **文章编号:** 0253-987X(2023)07-0062-12

Analytical Calculation of Magnetic Field in Surface-Mounted Permanent Magnet Vernier Machine Based on Improved Subdomain Model

CHANG Yong¹, BAO Guangqing², XU Jin², ZOU Mingbao³, JI Weiwei³

(1. College of Electrical Engineering and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;

2. School of Electronics and Information Engineering, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China;

3. Lanzhou Electric Machinery Co., Ltd., Lanzhou 730300, China)

Abstract: An improved subdomain analytical method is proposed to solve the problem that traditional subdomain analytical methods have a high dimension of the coefficient matrix and complex calculation process in the calculation of magnetic field of surface-mounted permanent magnet vernier machines (SPMVMs) rich in airgap harmonic magnetic fields. The proposed method transforms the Laplace equation or Poisson equation of the vector magnetic potential of each subdomain in the two-dimensional polar coordinate system into the equation form in the quasi-Cartesian coordinate system through coordinate transformation and uses the separation variable method to obtain the general solution of the vector magnetic potential equation of each subdomain. According

收稿日期: 2023-01-25。 作者简介: 常勇(1988—), 男, 博士生; 包广清(通信作者), 女, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51967012); 甘肃省重点研发计划资助项目(20YF8GA055); 甘肃省青年科技基金计划资助项目(22JR5RA807)。

网络出版时间: 2023-03-15

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20230314.1214.003.html>

to the boundary conditions, the undetermined coefficients are calculated and the analytical solutions of each vector magnetic potential are expressed in the form of hyperbolic functions. Finally, the no-load back-EMF, airgap magnetic density, and electromagnetic torque are calculated and compared with those obtained using the traditional subdomain analytical method and finite element method (FEM). The results show that the relative error is less than 1% between the improved subdomain analytical method and the FEM. Compared with the traditional subdomain analytical method, the calculation accuracy of no-load back EMF, airgap magnetic density, and electromagnetic torque is improved by 1.7%, 0.87%, and 3.66% respectively. The calculated waveforms of the no-load back-EMF for the experimental prototype are consistent with the measured waveforms, which verify the effectiveness and feasibility of the proposed analytical method.

Keywords: surface-mounted permanent magnet vernier motor; subdomain analytical model; hyperbolic function; the separation variable method; quasi-Cartesian coordinates system; finite element method

随着新能源汽车、数控机床、舰船与航空航天等战略新兴产业的快速发展,高品质电机已成为人类智能时代主驱动的重要选择。尤其是电机转矩密度的提升已成为相关高端装备的“卡脖子”问题,推动学术界和工业界在电机基础理论与应用技术方面不断探索“新边界”^[1]。新的电机拓扑结构、设计理论与供电模式层出不穷,例如开关磁链电机、横向磁场电机、磁齿轮电机、永磁游标电机等^[2-6]。

与传统永磁同步电机相比,永磁游标电机的最大特点是其电枢磁场与励磁磁场的极对数不相等,具有转矩密度高、结构简单、转矩脉动小等优势,已发展成为磁场调制电机的重要分支,但是该类电机功率因数偏低,故而成为优化设计需要解决的难点之一^[7]。永磁游标电机主要依靠气隙谐波磁场实现气隙磁场调制,达到提升转矩密度的目的,其内部磁场分布比传统永磁电机更加复杂^[8]。精确的磁场分析计算是快速设计、优化永磁游标电机的关键。目前,计算电机磁场的方法主要包括了有限元、保角变换、等效磁路和子域解析等方法。其中有限元法具有计算精度高,可有效处理材料非线性特性等诸多优点而被广泛应用于电机优化设计及磁场计算,但是有限元法计算耗时较长,难以直接表征电机电磁特性与结构参数之间的定量关系^[9]。表贴式永磁游标电机定子和转子极数不相等,对称性弱,通过有限元法进行建模的计算量更大,特别是在进行拓扑结构优化时需要耗费大量的时间。保角变换法是利用许瓦茨-克里施多夫变换,将形状比较复杂的未知场域边界,变换为另一个复平面上边界形状规则、分布已知的场域,从而获得原复杂边界的未知场域场量分

布情况。该方法在建模过程中视槽深无限大,对槽内磁场及绕组电感计算困难,从而影响空载反电动势的计算精度^[10-13]。等效磁路法是一种广泛应用于电机磁场近似计算的方法,其将磁场分布等效转化为磁路,能实现电机电磁参数的快速求解,可精确计算电机内部磁通密度分布情况,但不足之处在于较难在二维磁场计算中获得精准的等效磁路模型且求解过程繁琐^[14-16]。子域解析法是一种能够处理相对复杂的电磁分布的精确计算方法,其数学本质是分离变量法,将电机的求解域按照边界、材料、激励的不同划分为若干个子域,对每个子域利用分离变量法求解磁场的偏微分方程,根据边界条件得到确定的解。文献^[17]采用精确子域模型计算了永磁直线同步电机空载磁场,结果表明与有限元法计算结果一致。文献^[18]将子域模型应用于外转子永磁游标电机,分析计算了空载气隙磁密和反电动势,获得了良好的效果。文献^[19]以分裂齿永磁游标电机为例,考虑了开槽和调制齿对气隙磁场的影响,通过子域模型计算了负载下的电磁参数,得到了较高的计算精度,但是该方法通用性差,不同结构电机需要建立不同的子域模型^[20-24]。现有基于二维极坐标系的子域解析模型对于每个子域矢量磁位的拉普拉斯或泊松方程求解过程比较复杂,确定谐波系数复杂且冗长,对解析计算具有较大挑战性^[25]。特别是对于气隙谐波磁场丰富的永磁游标电机,解析计算会更加复杂。

为了降低传统子域解析模型的计算复杂度同时保持电磁计算精度,本文以表贴式永磁游标电机为例,提出一种改进的子域解析模型计算其电磁参数。该方法基于拉普拉斯方程或泊松方程在电机二维平

面场的不同区域求解,采用分离变量法,结合边界条件和界面条件,在准笛卡尔坐标系下用双曲函数表示气隙矢量磁位,与二维极坐标系下的解析模型相比,该模型系数矩阵小,有效降低了计算的复杂度。最后,通过有限元分析和样机实验测试分别验证了传统解析和改进解析模型,结果均表明改进后的解析模型可行且有效。

1 磁场调制机理

图1(a)为表贴式永磁游标电机拓扑结构图,定子槽内绕组为双层绕组。定子开口槽引起气隙磁导变化,从而对转子上的永磁体磁场和定子上的电枢磁场均进行调制,使调制好的谐波磁场相互作用。图1(b)为12槽20极表贴式永磁游标电机空载气隙工作磁场示意图。

由图1可知,表贴式永磁游标电机主要有3个工作谐波磁场。

(1) $Z - p_r$ 对极(即 p_s 对极)的调制磁场 B_{g1} , 转速为 $(p_r/p_s)N_r$, 转动方向与转子旋转方向相反。其中 Z 是定子槽数; p_r 是转子永磁体极对数; p_s 是定子绕组极对数。

(2) p_r 对极的永磁体基波磁场 B_{g0} , 转速为 N_r 。

(3) $Z + p_r$ 对极的调制磁场 B_{g2} , 转速为 $[p_r/(Z + p_r)]N_r$, 转动方向与转子旋转方向相同。

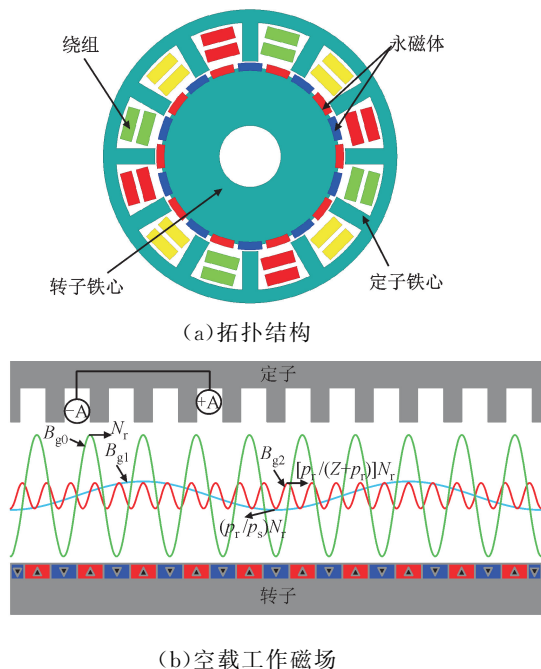


图1 表贴式永磁游标电机磁场调制示意图

Fig.1 Schematic diagram of magnetic field modulation of SPMVM

2 解析模型

根据子域解析法的分段离散化思想,对电机整体磁场求解域进行分块建模,将求解区域分为磁场边界连续可求解的多个子区域,根据不同区域的特性建立矢量磁位方程,然后通过边界(面)条件对各子域矢量方程进行求解,获得电机性能与设计参数之间的解析表达式。为便于建模与分析,针对图2所示游标电机拓扑结构做出以下假设:①忽略端部效应;②定、转子铁心磁导率无穷大,即 $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$; ③定子槽内上、下排布线圈边的电流密度均匀分布。

R_1 为转子内半径; R_2 为转子外表面半径; R_3 为永磁体外表面半径; R_4 为定子内半径; R_5 为定子槽内层绕组半径; R_6 为定子槽深半径; R_7 为定子外表面半径; α 为永磁体宽角; β 为槽宽角; δ 为相邻永磁体间隔角; Q 为绕组节距。

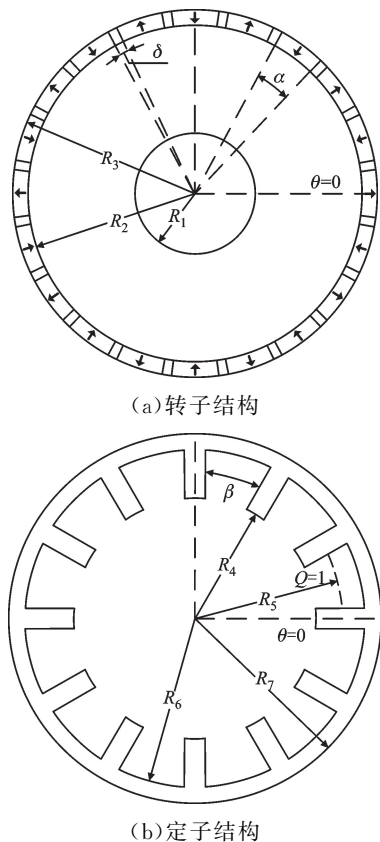


图2 表贴式永磁游标电机拓扑结构示意图

Fig.2 Structure of SPMVM

子域解析模型是一种根据电机的结构和材料属性将电机划分为多个计算子域的简化分析模型,通常用于电机初始设计阶段的参数计算与优化。由于子域解析方法的分析区域在二维平面内,因此在电机轴向有限长度范围内所产生的三维端部效应可忽略。

略不计。在分析电机气隙和槽内磁场时,磁力线都是垂直穿过铁心表面的,沿着铁心表面磁场强度的切向分量为0,即 $H_t=0$, $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n}=0$, $\mathbf{A}$ 为矢量磁位,满足诺依曼边界条件,因此通常假设定、转子磁导率无穷大,以便于问题的求解。对于本文研究的表贴式永磁游标电机而言,定子槽为形状规则的开口槽,不考虑定子绕组中涡流引起的集肤效应,假设定子槽内上、下排布线圈边的电流密度均匀分布。

为了求解表贴式永磁游标电机的二维磁场,根据激励源和材料特性的不同划分子域。由于定、转子铁心材料磁导率趋于无穷大,故可将电机磁场求解域划分为3类区域:磁化区(永磁体)、载流区(绕组)和无源区(气隙),如图3所示。每个子域由规则形状与相应的边界条件构成,子域中的矢量磁位分布分别用 $\mathbf{A}_I$ 、 $\mathbf{A}_{II}$ 和 $\mathbf{A}_{III}$ 表示。

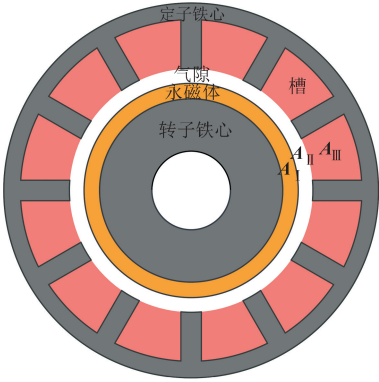


图3 表贴式永磁游标电机子域划分

Fig. 3 Subdomain division of SPMVM

子域 I 表示转子永磁体,满足 $R_2 \leq r \leq R_3$, $-\frac{\alpha}{2} + \frac{k\pi}{p_r} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{k\pi}{p_r}$, 其中 $k=1, 2, \dots, p_r$, 磁导率为 μ_{rm} 。子域 II 表示气隙,满足 $R_3 \leq r \leq R_4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。子域 III 表示定子槽,满足 $R_4 \leq r \leq R_6$, 其磁导率为 μ_0 。

3 坐标变换

根据解析计算模型求解每个子域中的拉普拉斯方程或泊松方程的一般解。二维极坐标下的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

式中: $R_1 \leq r \leq R_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ 。

对于无源区域,矢量磁位 $\mathbf{A}_x$ 满足

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2)$$

对于永磁体区域,矢量磁位 $\mathbf{A}_x$ 满足

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial \theta^2} = -\frac{\mu_0}{r} \left(\mathbf{M}_\theta - \frac{\partial \mathbf{M}_r}{\partial \theta} \right) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{M}_\theta$ 、 $\mathbf{M}_r$ 分别为永磁体切向极化强度和径向极化强度。

对于有源区域,矢量磁位 $\mathbf{A}_x$ 满足

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial \theta^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{J}$ 为槽内绕组外加电流密度。采用以上拉普拉斯方程或泊松方程进行求解时,由于系数矩阵大,计算复杂,因此进行对数变换,简化待定系数求解。

令 $r=R_1 e^{-t}$ [26], 将 r 代入式(1), 得

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5)$$

式中: $\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \leq t \leq 0$; $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ 。

式(5)为准笛卡尔坐标下的解析表达式。因此,得到基于双曲函数的矢量磁位的解析表达式。

对于无源区域,矢量磁位 $\mathbf{A}_x$ 满足

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial \theta^2} = 0 \quad (6)$$

对于永磁体区域,矢量磁位 $\mathbf{A}_x$ 满足

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial \theta^2} = -\frac{\mu_0 e^t}{R_i} \left(\mathbf{M}_\theta - \frac{\partial \mathbf{M}_r}{\partial \theta} \right) \quad (7)$$

对于有源区域,矢量磁位 $\mathbf{A}_x$ 满足

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial \theta^2} = -\mu_0 \mathbf{J} R_i^2 e^{-2t} \quad (8)$$

4 各子域磁场的解析计算

4.1 定子槽子域矢量磁位的泊松方程求解

定子槽子域为有源区域且为双层绕组形式,如图4所示,其泊松方程由下式给出

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{III}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{III}}{\partial \theta^2} = -\mu_0 \mathbf{J} R_4^2 e^{-2t} \\ -\frac{\beta}{2} + \frac{2k\pi}{Z} \leq \theta \leq \frac{\beta}{2} + \frac{2k\pi}{Z}, t_8 \leq t \leq t_7 \end{cases} \quad (9)$$

式中: $t_8 = \ln(R_4/R_6)$; $t_7 = 0$; Z 为定子槽数。

矢量磁位在定子槽底和两侧的边界条件如下

$$\left. \frac{\partial \mathbf{A}_{III}}{\partial \theta} \right|_{-\frac{\beta}{2} + \frac{2k\pi}{Z}} = 0 \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{A}_{III}}{\partial \theta} \right|_{\frac{\beta}{2} + \frac{2k\pi}{Z}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{A}_{III}}{\partial t} \right|_{t=t_8} = 0 \quad (11)$$

根据边界条件,采用分离变量法求解方程式(9)的通

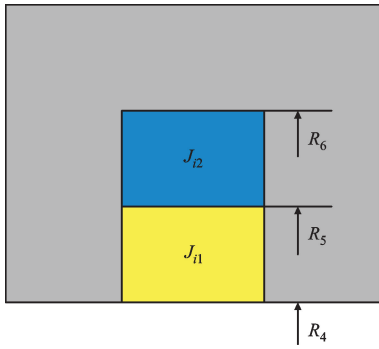


图4 定子槽与绕组形式

Fig. 4 Stator slot and winding configurations

解如下

$$A_{\text{III}}(t, \theta) = a_0^{\text{III}} - \frac{1}{2}\mu_0 J_i \left(e^{-t_8} t + \frac{1}{2} e^{-2t+t_8} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{\text{III}} \frac{K\beta}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{\beta} \left(\theta + \frac{\beta}{2} - \frac{2k\pi}{Z} \right) \right) \quad (12)$$

式中: $K = \cosh \left(\frac{n\pi}{\beta} (t-t_8) \right) / \cosh \left(\frac{n\pi}{\beta} (t_7-t_8) \right)$; n 为正整数; 待定系数 a_0^{III} 和 a_n^{III} 根据矢量磁位的连续性和边界条件确定。

由于矢量磁位在子域 III 和子域 II 边界处的连续性, 即

$$\begin{cases} A_{\text{III}}(t_7, \theta) = A_{\text{II}}(t_6, \theta) \\ -\frac{\beta}{2} + \frac{2k\pi}{Z} \leq \theta \leq \frac{\beta}{2} + \frac{2k\pi}{Z} \end{cases} \quad (13)$$

根据式(13)可得

$$\begin{cases} a_0^{\text{III}} = \frac{1}{4}\mu_0 J_i e^{t_8} + \frac{1}{\beta} \int_{-\beta/2+2k\pi/Z}^{\beta/2+2k\pi/Z} A_{\text{II}}(t_6, \theta) d\theta \\ a_n^{\text{III}} = \frac{2}{\beta} \int_{-\beta/2+2k\pi/Z}^{\beta/2+2k\pi/Z} A_{\text{II}}(t_6, \theta) \cos \left(\frac{n\pi\theta}{\beta} \right) d\theta \end{cases} \quad (14)$$

4.2 气隙矢量磁位的拉普拉斯方程求解

对于子域 II, 矢量磁位 A_{II} 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_{\text{II}}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 A_{\text{II}}}{\partial \theta^2} = 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, t_6 \leq t \leq t_5 \end{cases} \quad (15)$$

式中: $t_6 = \ln(R_3/R_4)$; $t_5 = 0$ 。

考虑周期性边界条件, 求解方程式(15)的通解为

$$A_{\text{II}}(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (K_1 a_n^{\text{II}} + K_2 b_n^{\text{II}}) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (K_1 c_n^{\text{II}} + K_2 d_n^{\text{II}}) \sin(n\theta) \quad (16)$$

式中: n 为正整数; a_n^{II} 、 b_n^{II} 、 c_n^{II} 和 d_n^{II} 为待定系数;

$$K_1 = \frac{1}{n} \frac{\cosh(n(t-t_5))}{\sinh(n(t_6-t_5))}; K_2 = \frac{1}{n} \frac{\cosh(n(t-t_6))}{\sinh(n(t_5-t_6))}。$$

矢量磁位在子域 II 的边界条件确定如下

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial A_{\text{II}}}{\partial t} \right|_{t=t_5} = \left. \frac{\partial A_{\text{I}}}{\partial t} \right|_{t=t_4} = g(\theta) \\ -\frac{\alpha}{2} + \frac{k\pi}{p_r} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{k\pi}{p_r} \end{cases} \quad (17)$$

根据式(17)可得

$$a_n^{\text{II}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha/2+k\pi/p_r}^{\alpha/2+k\pi/p_r} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (18)$$

$$c_n^{\text{II}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha/2+k\pi/p_r}^{\alpha/2+k\pi/p_r} g(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (19)$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial A_{\text{II}}}{\partial t} \right|_{t=t_6} = \left. \frac{\partial A_{\text{III}}}{\partial t} \right|_{t=t_7} = h(\theta) \\ -\frac{\beta}{2} + \frac{2k\pi}{Z} \leq \theta \leq \frac{\beta}{2} + \frac{2k\pi}{Z} \end{cases} \quad (20)$$

根据式(20)可得

$$b_n^{\text{II}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta/2+2k\pi/Z}^{\beta/2+2k\pi/Z} h(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (21)$$

$$d_n^{\text{II}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta/2+2k\pi/Z}^{\beta/2+2k\pi/Z} h(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (22)$$

4.3 转子永磁体子域矢量磁位的泊松方程求解

对于子域 I, 矢量磁位 A_{I} 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_{\text{I}}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 A_{\text{I}}}{\partial \theta^2} = -\frac{\mu_{\text{rm}} e^t}{R_2} \left(M_0 - \frac{\partial M_r}{\partial \theta} \right) \\ -\frac{\alpha}{2} + \frac{k\pi}{p_r} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{k\pi}{p_r}, t_4 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (23)$$

式中: $t_4 = \ln(R_2/R_3)$; $t_3 = 0$ 。

$$\alpha = \frac{\pi\alpha_p}{p_r} \quad (24)$$

$$\beta = \frac{(1-\alpha_p)\pi}{p_r} \quad (25)$$

式中: α_p 为永磁体极弧系数。

4.3.1 永磁体径向磁化

表贴式永磁体展开的示意图如图5所示, 表贴式永磁体径向磁化的径向和切向分量可以表示为

$$\begin{cases} M_{\text{rm}} = \frac{4(-1)^k B_r}{\mu_{\text{rm}} n\pi} \sin \left(\frac{n\pi\alpha_p}{2} \right) \\ M_{\theta n} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

式中: B_r 为永磁体剩磁密度。

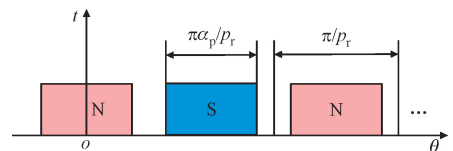


图5 表贴式永磁体展开图

Fig. 5 View of permanent magnets

4.3.2 永磁体平行磁化

永磁体平行磁化的径向和切向分量可表示为

$$\begin{cases} M_{rn} = \frac{B_r}{\mu_{rm}} \alpha_p [A_{1n}(\alpha_p) + A_{2n}(\alpha_p)] \\ M_{\theta n} = \frac{B_r}{\mu_{rm}} \alpha_p [A_{1n}(\alpha_p) - A_{2n}(\alpha_p)] \end{cases} \quad (27)$$

$$A_{1n}(\alpha_p) = \frac{\sin((np+1)\pi\alpha_p/2p_r)}{(np+1)\pi\alpha_p/2p_r} \quad (28)$$

$$A_{2n}(\alpha_p) = \begin{cases} \frac{\sin((np-1)\pi\alpha_p/2p_r)}{(np-1)\pi\alpha_p/2p_r}, & np \neq 1 \\ 1, & np = 1 \end{cases} \quad (29)$$

4.3.3 表贴式永磁体径向磁化的泊松方程求解

对于表贴式永磁体径向磁化的结构设计,永磁体子域的第二类边界条件为

$$\left. \frac{\partial \mathbf{A}_I}{\partial t} \right|_{t=t_3} = 0 \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{A}_I}{\partial \theta} \right|_{\theta=-\frac{\alpha}{2}+\frac{k\pi}{p}} = R_2 e^{-t} (-1)^k B_r \quad (31)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{A}_I}{\partial \theta} \right|_{\theta=\frac{\alpha}{2}+\frac{k\pi}{p}} = R_2 e^{-t} (-1)^k B_r \quad (32)$$

根据方程式(26),利用分离变量法得到泊松方程式(23)的通解可表示如下

$$\begin{aligned} A_I(t, \theta) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(Ma_n^I + X_n^I(t) \cos\left(\frac{n\pi\alpha_p}{2}\right) \right) \cos(n\theta) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(Mc_n^I + X_n^I(t) \sin\left(\frac{n\pi\alpha_p}{2}\right) \right) \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (33)$$

$$M = \frac{\cosh(n(t-t_4))}{\cosh(n(t_3-t_4))} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} X_n^I(t) = & \left(1 + \frac{1}{n} e^{(n+1)t}\right) f_n(t) - \\ & M \left(1 + \frac{1}{n} e^{(n+1)t_3}\right) f_n(t_3) \end{aligned} \quad (35)$$

$$f_n(t) = \begin{cases} \mu_0 \frac{np_r M_{rn} + M_{\theta n}}{1 - np_r^2} R_2 e^{-t}, & np_r \neq 1 \\ 0, & np_r = 1 \end{cases} \quad (36)$$

式中: n 为正整数;系数 a_n^I 和 c_n^I 根据边界条件确定。

矢量磁位的边界条件为

$$A_I(t_4, \theta) = A_{II}(t_5, \theta) \quad (37)$$

根据式(33)可以确定 a_n^I 和 c_n^I

$$a_n^I = \frac{2}{\beta} \int_{-\alpha/2+k\pi/p_r}^{\alpha/2+k\pi/p_r} A_{II}(t_5, \theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (38)$$

$$c_n^I = \frac{2}{\beta} \int_{-\alpha/2+k\pi/p_r}^{\alpha/2+k\pi/p_r} A_{II}(t_5, \theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (39)$$

各子域的磁通密度可根据各子域的矢量磁位求解

$$\begin{cases} B_t = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{e^t}{R_i} \frac{\partial A}{\partial \theta} \\ B_\theta = -\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{e^t}{R_i} \frac{\partial A}{\partial t} \end{cases} \quad (40)$$

5 电磁参数计算

5.1 电磁转矩计算

利用麦克斯韦应力张量法计算电磁转矩,并表示为

$$T_e = \frac{L_s}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_t I_t(t_e, \theta) B_\theta I_\theta(t_e, \theta) d\theta \quad (41)$$

式中: L_s 为电机轴向有效长度; $t_e = \ln(R_3/R_e)$; $R_e = (R_3 + R_4)/2$ 。

5.2 磁通量计算

对于双层绕组,三相磁链为

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1a} \\ \psi_{1b} \\ \psi_{1c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{2a} \\ \psi_{2b} \\ \psi_{2c} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{1a} \\ \psi_{1b} \\ \psi_{1c} \end{bmatrix} = \frac{N_s}{2} \mathbf{C}_1^T [\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \dots, \varphi_{1Z}] \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{2a} \\ \psi_{2b} \\ \psi_{2c} \end{bmatrix} = \frac{N_s}{2} \mathbf{C}_2^T [\varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{23}, \dots, \varphi_{2Z}] \quad (44)$$

定子槽与每相绕组的排布矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

对于定子槽,磁通量由下式计算

$$\varphi_{1i} = -\frac{2L_s R_4^2}{k_f S} \int_0^{\frac{\beta}{2}} \int_0^{t_8} A_{IIIi}(t, \theta) e^{-2t} dt d\theta \quad (46)$$

$$\varphi_{2i} = -\frac{2L_s R_4^2}{k_f S} \int_{\frac{\beta}{2}}^{\beta} \int_0^{t_6} A_{IIIi}(t, \theta) e^{-2t} dt d\theta \quad (47)$$

式中: k_f 为定子槽满率; S 为定子槽截面积。

5.3 空载反电动势计算

三相反电动势为

$$\begin{cases} E_a = \omega \frac{d\psi_a}{d\theta} \\ E_b = \omega \frac{d\psi_b}{d\theta} \\ E_c = \omega \frac{d\psi_c}{d\theta} \end{cases} \quad (48)$$

式中, ω 为转子角速度。

基于改进子域解析模型的计算流程如图 6 所示,首先通过坐标变换实现模型简化处理,确定各子域矢量磁位方程的解析解,然后进行电机电磁参数计算,为下一步与有限元法计算结果进行对比分析奠定基础。

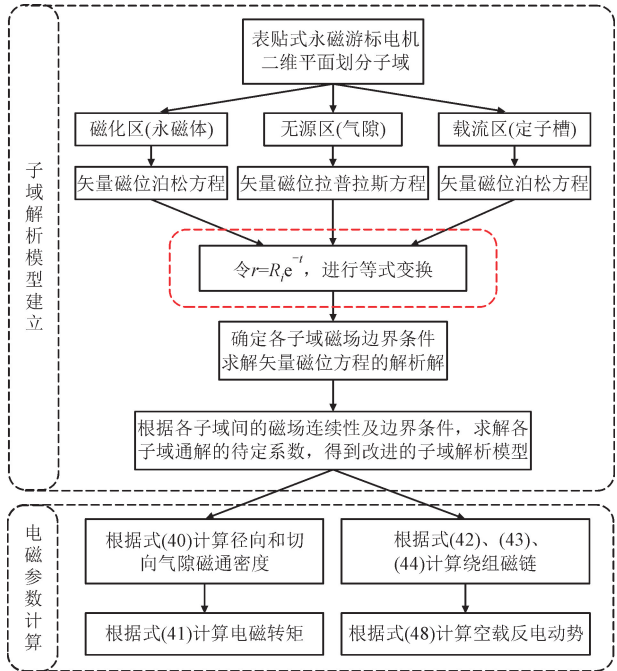


图 6 改进子域解析模型的计算流程

Fig. 6 Flow diagram of the improved subdomain analytical model

6 有限元分析与对比

本文以额定功率为 1 kW、定子槽数为 12、定子绕组极对数为 2、永磁体极对数为 10、极比为 5 的表贴式永磁游标电机为例,验证改进后解析模型的可行性和准确性。通过 JMAG 有限元分析软件建立模型,在相同的计算条件下,计算了空载气隙磁密、空载反电动势和额定转矩,分别与传统解析方法和改进解析方法的计算结果进行比较。表贴式永磁游标电机具体参数见表 1。

表 1 表贴式永磁游标电机具体参数

Table 1 Parameters of SPMVM

参数	数值
定子槽数 Z	12
定子极对数 p_s	2
转子极对数 p_r	10
定子外径 R_7/mm	62
定子内径 R_6/mm	40.3
气隙长度 g/mm	0.8
转子内径 R_1/mm	16
永磁体厚度 H_m/mm	3.3
转速 $N_r/(\text{r} \cdot \text{min}^{-1})$	500
每相串联匝数 N_s	125
定子齿宽 h_1/mm	6.8
定子轭宽 h_2/mm	5.5
铁心有效长度 L_s/mm	80

图 7 为表贴式永磁游标电机三维拓扑结构图。根据表 1 的参数建立有限元分析模型,额定转速设定为 500 r/min,进行空载电磁性能分析。图 8 为有限元模型的空载磁力线和磁密分布图。

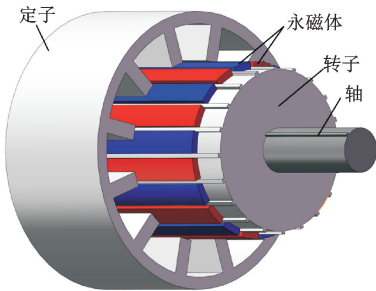
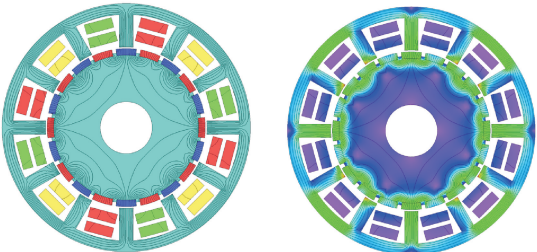


图 7 表贴式永磁游标电机三维拓扑结构
Fig. 7 3D topological structure of SPMVM



(a) 磁力线分布 (b) 磁密分布

图 8 空载磁场有限元仿真

Fig. 8 No-load magnetic flux distribution

计算空载工况下的磁场分布,利用商用软件 JMAG 建立二维瞬态场。对表贴式永磁游标电机空载时的气隙磁场进行仿真,利用场计算器求解空载气隙磁密,如图 9 所示。

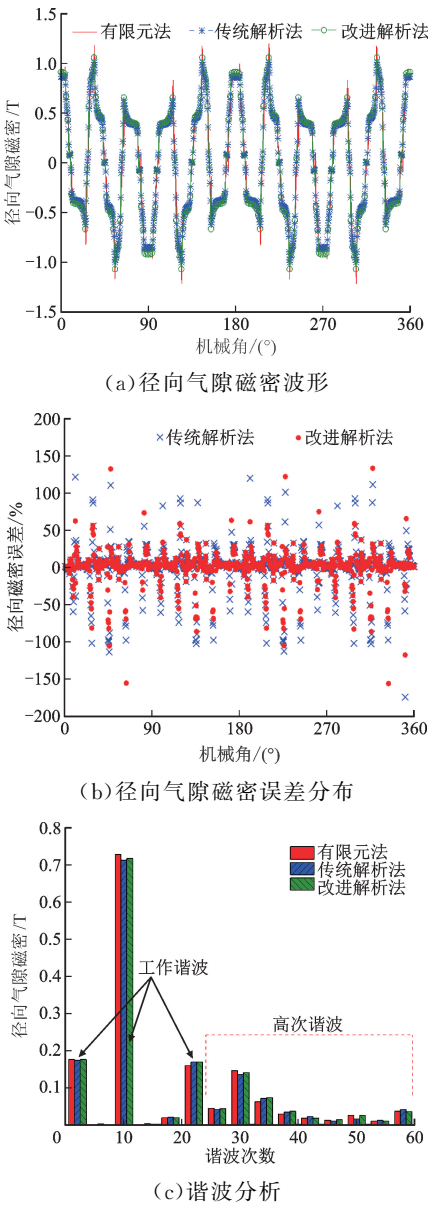


图 9 空载气隙磁密分布

Fig. 9 Airgap magnetic density distribution in no-load field

图 9(a)给出了径向气隙磁密的波形分布,由图可见,改进解析方法和有限元法得到的波形吻合良好,由于解析方法在计算时只选取了有限次谐波,忽略了其余高次谐波,因此只有在波形的尖峰出现一些误差,如果选取的谐波次数越多,计算结果就会越接近有限元分析结果,但是随着选取谐波次数的增加,计算量也会增大。图 9(b)为传统解析方法和改进解析方法的气隙径向磁密波形相对于有限元法各点的误差分布,由图 9 可知,改进后解析方法比传统解析方法的计算误差更小。图 9(c)是气隙径向磁密的谐波分析对比结果,其中 2、10、22 次谐波为主要工作谐波,其余谐波为高次谐波。以有限元法计算结果为标

准值,对传统解析方法和改进解析方法计算的主要工作谐波幅值进行误差分析,结果见表 2。从表 2 中的数据可以看出,采用传统解析方法计算 2 次工作谐波相对于有限元计算结果的误差为 1.2%,改进后的解析方法计算误差为 0.33%;采用传统解析方法计算 10 次工作谐波相对于有限元计算结果的误差为 2.12%,改进后的解析方法计算误差为 1.42%;采用传统解析方法计算 22 次工作谐波相对于有限元计算结果的误差为 5.71%,改进后的解析方法计算误差为 5.77%。由此可见,改进的解析方法对空载气隙磁密计算有较高的准确度,误差均在设计允许的范围内。

表 2 径向气隙磁密主要工作谐波幅值及误差比较
Table 2 The main work harmonic amplitude value and error

工作 谐波	磁通密度/T			磁通密度相对误差/%	
	FEM	改进前	改进后	改进前	改进后
2	0.175 77	0.173 66	0.176 35	1.20	0.33
10	0.727 64	0.712 25	0.717 32	2.12	1.42
22	0.159 81	0.168 93	0.169 04	5.71	5.77

在空载工况下,转速为 500 r/min 时,计算三相空载反电动势,结果如图 10 所示。两种解析方法计算的空载反电动势波形均接近正弦波,且与有限元法计算结果吻合较好。

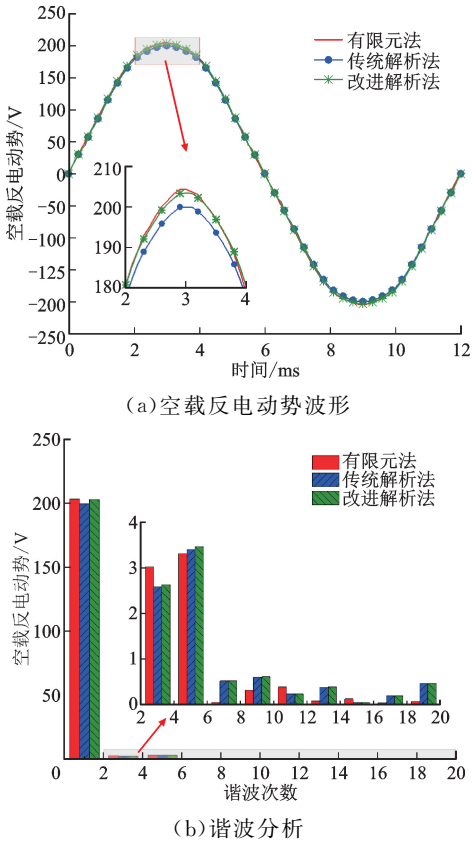


图 10 空载反电动势波形与谐波分析

Fig. 10 No-load back-EMF waveform and harmonic analysis

额定转速和电流的电磁转矩如图 11 所示,与传统解析方法相比,改进后的解析方法的电磁转矩计算结果更接近有限元法计算结果,电磁转矩脉动更小。

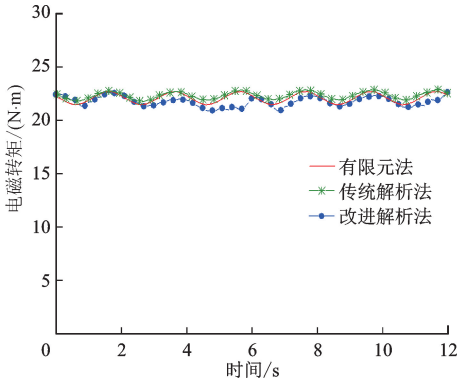


图 11 额定转速和电流的电磁转矩

Fig. 11 Electromagnetic torque at rated speed and current

分别通过传统解析法、改进解析法和有限元法计算三相绕组磁链波形如图 12 所示,两种解析方法计算所得的磁链波形与有限元计算均存在一定误差,这是因为在计算每一个线圈的磁链时误差被积累。

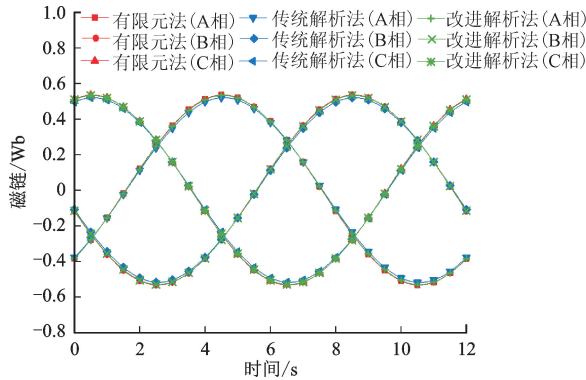


图 12 3 种方法的三相绕组磁链波形

Fig. 12 Flux linkage of three-phase windings using three methods

7 样机测试与验证

为了验证改进子域解析方法的有效性和准确性,根据表 1 中的电机参数加工制作了表贴式永磁游标电机,实验平台如图 13 所示。

通过实验平台测试了空载额定转速为 500 r/min 时的三相反电动势,如图 14(a)所示,有效值为 133 V,频率为 83.33 Hz。图 14(b)是 A 相空载反电动势测量值结果与有限元法、两种解析方法计算结果对比,波形总体趋势基本一致。图 15(a)是转速为

400 r/min 时的三相空载反电动势实测波形,对 A 相的空载反电动势进行了比较,如图 15(b)所示。

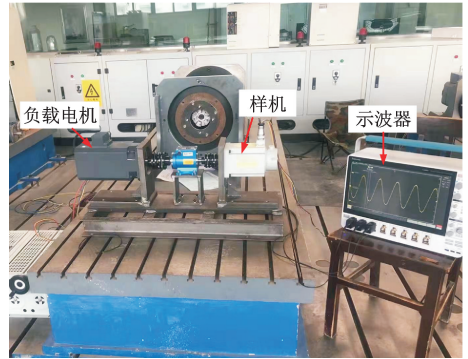
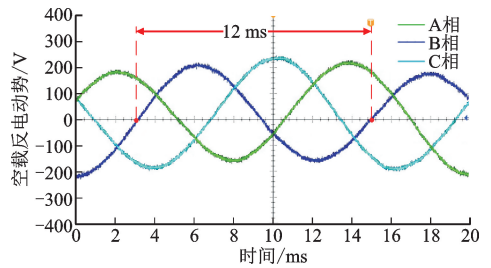
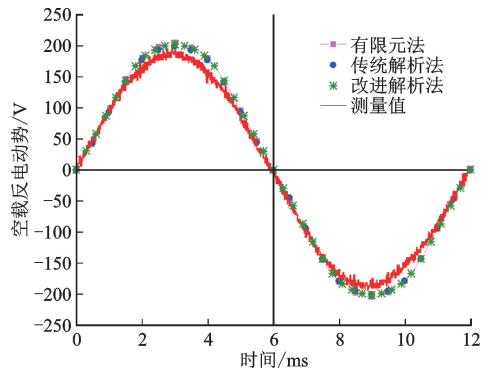


图 13 样机测试实验平台

Fig. 13 The test bench for the proposed SPMVM prototype



(a) 三相空载电动势测试波形



(b) A 相空载反电动势测量值与 3 种方法计算结果的对比

图 14 转速为 500 r/min 时的空载反电动势波形

Fig. 14 Comparison of the phase no-load back-EMF waveforms (500 r/min)

根据式(45)可知,反电动势的计算精度取决于磁链的计算精度,由图 14(b)、图 15(b)可以看出,采用有限元法和解析法的反电动势计算结果均略大于实际测量结果,这是因为在有限元法和解析法计算时默认定、转子铁心磁导率均为无穷大,永磁体相对磁导率为 1,且未考虑样机制作中的各类材料的实际特性与理想特性的误差以及样机制作的结构误差。

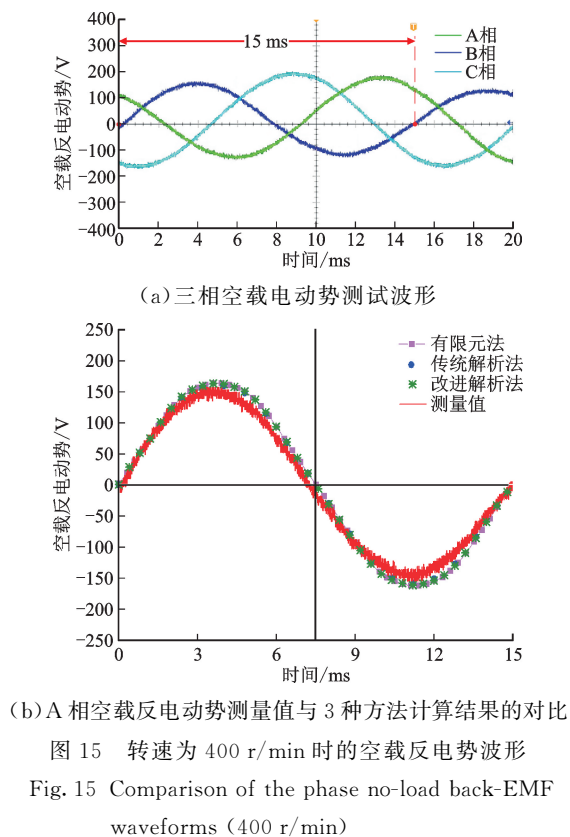


图 15 转速为 400 r/min 时的空载反电势波形
Fig. 15 Comparison of the phase no-load back-EMF waveforms (400 r/min)

8 结 论

针对二维极坐标下的电机磁场子域解析模型数学方程多、系数矩阵大、计算过程复杂等问题,本文提出一种改进子域解析模型用于表贴式永磁游标电机磁场分析模型。该模型在准笛卡尔坐标系下表示各子域矢量磁位的拉普拉斯方程和泊松方程,采用分离变量法确定每个子域的拉普拉斯方程或泊松方程的通解,然后将方程的解简化为双曲函数形式,解析表达式比二维极坐标系更简单。与传统解析模型、有限元模型、样机实验测试进行对比,可以得出以下结论:

- (1)与二维极坐标系下的传统电机磁场子域解析模型相比,该模型通过坐标变换,减少了矢量磁位方程数量,降低了原始模型系数矩阵复杂度,缩短了运算时间;
- (2)通过与传统解析模型、有限元模型、样机实验测试数据对比,得到空载气隙磁密、转矩、空载反电动势的波形趋势一致且吻合较好,虽有误差但都在设计允许的误差范围以内,从而保证了原有解析计算的精度;
- (3)在电机设计中,虽然有限元分析有诸多便利之处,但本文改进的解析方法对于对称性弱的永磁

游标电机初始优化设计和反向验证方面也不失为一种快速便捷的计算方法。

参考文献:

[1] 马伟明,王东,程思为,等. 高性能电机系统的共性基础科学问题与技术发展前沿 [J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(8): 2025-2035.
MA Weiming, WANG Dong, CHENG Siwei, et al. Common basic scientific problems and development of leading-edge technology of high performance motor system [J]. Proceedings of the CSEE, 2016, 36(8): 2025-2035.

[2] 花为,朱晓锋. 磁通反向永磁电机及其关键技术综述 [J]. 中国电机工程学报, 2020, 40(8): 2657-2669.
HUA Wei, ZHU Xiaofeng. Overview of flux-reversal permanent magnet machine and its key technologies [J]. Proceedings of the CSEE, 2020, 40(8): 2657-2669.

[3] 黄海林,李大伟,曲荣海,等. 磁齿轮复合永磁电机拓扑及应用综述 [J]. 电工技术学报, 2022, 37(6): 1381-1397.
HUANG Hailin, LI Dawei, QU Ronghai, et al. A review of magnetic geared machines: topologies and applications [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2022, 37(6): 1381-1397.

[4] 罗俊,寇宝泉,杨小宝. 双交替极横向磁通直线电机的优化与设计 [J]. 电工技术学报, 2020, 35(5): 991-1000.
LUO Jun, KOU Baoquan, YANG Xiaobao. Optimization and design of dual-consequent-pole transverse flux linear machine [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2020, 35(5): 991-1000.

[5] GUO Kaikai, GUO Youguang. Design and analysis of an outer mover linear-rotary vernier machine [J]. Journal of Electrical Engineering & Technology, 2022, 17(2): 1087-1095.

[6] YU Jincheng, LIU Chunhua, ZHAO Hang. Design and multi-mode operation of double-stator toroidal-winding PM vernier machine for wind-photovoltaic hybrid generation system [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2019, 55(7): 1-7.

[7] 林鹤云,张洋,阳辉,等. 永磁游标电机的研究现状与最新进展 [J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(18): 5021-5034, 5127.
LIN Heyun, ZHANG Yang, YANG Hui, et al. Overview and recent developments of permanent magnet vernier machines [J]. Proceedings of the CSEE, 2016, 36(18): 5021-5034, 5127.

[8] 石玉君,程子活,蹇林旒. 两种典型的场调制型永磁

- 电机的对比分析 [J]. 电工技术学报, 2021, 36(1): 120-130.
- SHI Yujun, CHENG Zihuo, JIAN Linni. Comparative analysis of two typical field modulated Permanent-Magnet machines [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2021, 36(1): 120-130.
- [9] GOLOVANOV D, GERADA C. An analytical subdomain model for dual-rotor permanent magnet motor with Halbach array [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2019, 55(12): 1-16.
- [10] 于吉坤, 李立毅, 张江鹏, 等. 定子开槽永磁同步电机气隙比磁导解析计算 [J]. 电工技术学报, 2016, 31(z1): 45-52.
- YU Jikun, LI Liyi, ZHANG Jiangpeng, et al. Analytical calculation of air-gap relative permeance in slotted permanent magnet synchronous motor [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2016, 31(z1): 45-52.
- [11] XUE Likun, LUO Ling. Semi-analytical calculation of the unsaturated magnetic field distribution of a slotted spoke-type interior permanent magnet machine with conformal mapping method [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2022, 58(5): 1-10.
- [12] ALAM F R, ABBASZADEH K. Magnetic field analysis in eccentric surface-mounted permanent-magnet motors using an improved conformal mapping method [J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2016, 31(1): 333-344.
- [13] MIRAZIMI M S, KIYOUMARSI A. Magnetic field analysis of SynRel and PMASynRel machines with hyperbolic flux barriers using conformal mapping [J]. IEEE Transactions on Transportation Electrification, 2020, 6(1): 52-61.
- [14] 庞古才, 邓智泉, 张忠明. 基于改进广义磁路法的表贴式永磁电机空载气隙磁场解析计算 [J]. 电工技术学报, 2019, 34(22): 4623-4633.
- PANG Gucai, DENG Zhiquan, ZHANG Zhongming. Analytical calculation of no-load air gap magnetic field in surface-mounted permanent magnet motor based on improved generalized magnetic circuit method [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2019, 34(22): 4623-4633.
- [15] DIANATI B, HAHN I. Nonlinear modeling of MG-SPMs based on hybrid subdomain and magnetic equivalent circuitry [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2022, 58(1): 1-10.
- [16] ZHANG Linlin. An efficient modeling of air gap and nonlinear analysis of magnetic equivalent circuit for large turbogenerators under no-load condition [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2022, 58(2): 1-8.
- [17] 王明杰, 徐伟, 杨存祥, 等. 基于精确子域模型的永磁直线同步电机空载磁场解析计算 [J]. 电工技术学报, 2020, 35(5): 942-953.
- WANG Mingjie, XU Wei, YANG Cunxiang, et al. Analytical calculation of no-load magnetic field in permanent magnet linear synchronous motors based on an accurate subdomain model [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2020, 35(5): 942-953.
- [18] 郭思源, 周理兵, 曲荣海, 等. 基于精确子域模型的游标永磁电机解析磁场计算 [J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(30): 71-80.
- GUO Siyuan, ZHOU Libing, QU Ronghai, et al. Analytical magnetic field calculation of vernier permanent-magnet machines based on accurate subdomain model [J]. Proceedings of the CSEE, 2013, 33(30): 71-80.
- [19] ONER Y, ZHU Z Q, WU L J, et al. Analytical on-load subdomain field model of permanent-magnet vernier machines [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(7): 4105-4117.
- [20] 张守首, 郭思源. 基于子域分析模型的实心转子感应电机磁场解析 [J]. 电工技术学报, 2021, 36(20): 4285-4296.
- ZHANG Shoushou, GUO Siyuan. Analytical solution of magnetic field in solid rotor induction machine based on subdomain model [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2021, 36(20): 4285-4296.
- [21] 常勇, 包广清, 何婷. 基于子域模型的高温超导绕组电机磁场解析计算 [J]. 电机与控制学报, 2022, 26(6): 121-133.
- CHANG Yong, BAO Guangqing, HE Ting. Analytical calculation of magnetic field of high temperature superconducting winding motors based on subdomain model [J]. Electric Machines and Control, 2022, 26(6): 121-133.
- [22] 李京泽, 吴新振, 陈春涛. 基于磁极分块的永磁电机气隙磁场解析计算 [J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(18): 6390-6398.
- LI Jingze, WU Xinzhen, CHEN Chuntao. Analytical calculation of air gap magnetic field for permanent magnet machines based on pole partition processing [J]. Proceedings of the CSEE, 2021, 41(18): 6390-6398.
- [23] CHEN Feixue, ZHANG Chi, CHEN Jinhua, et al. Accurate subdomain model for computing magnetic field of short moving-magnet linear motor with Halbach array [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2020, 56

(9): 1-9.

[24] 程博, 潘光, 毛昭勇. 轴向磁通电机中 Halbach 阵列永磁体的解析优化方法 [J]. 西安交通大学学报, 2020, 54(10): 77-83.

CHENG Bo, PAN Guang, MAO Zhaoyong. Analytical optimization method for the Halbach array of permanent magnet in axial flux motor [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2020, 54(10): 77-83.

[25] ZHU Z Q, WU L J, XIA Z P. An accurate subdomain model for magnetic field computation in slotted surface-mounted permanent-magnet machines [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2010, 46(4): 1100-1115.

[26] JABBARI A, DUBAS F. A new subdomain method for performances computation in interior permanent-magnet (IPM) machines [J]. Iranian Journal of Electrical and Electronic Engineering, 2019, 16(1): 26-38.

(编辑 武红江)